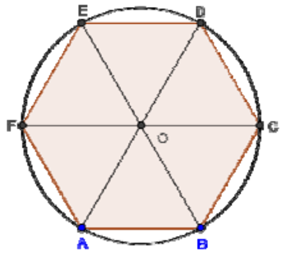
DEVOIR DE SYNTHESE _- GEOMETRIE - CORRECTION

a. ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 10 cm.

1. Justifier que OAB est un triangle équilatéral.
   • Δ OAB est équilatéral car OAB est isocèle (|OA| = |OB| = rayons) et l'angle AÔB vaut 60°. Donc les deux angles à la base valent (180° - 60°)/2 = 60°.
2. En déduire le périmètre de l'hexagone. •P = 6. 10 = 60 cm
3. Justifier que OABC est un losange.
   • OABC est un losange car |OA| = |OC| = |AB | = |BC |= 10 cm
4. Justifier que FAC est un triangle rectangle.
   • car tout triangle inscrit dans un demi - cercle est rectangle.
5. Calculer AC (valeur formelle puis arrondie au centième)
   •par Pythagore, on a : $|FC|^2 = |FA|^2 + |AC|^2$
   Donc : $|AC|^2 = |FC|^2 - |FA|^2 = 20^2 - 10^2 = 300$ et $|AC| = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} = 17{,}32$
6. Calculer l'aire du triangle OAB puis l'aire de l'hexagone .
   • Aire de OAB : $\dfrac{|AB|.|OH|}{2}$ où [OH] est la hauteur du triangle OAB que l'on calcule avec Pythagore : $|OH|^2 = |OB|^2 - |BH|^2$
   $= 10^2 - 5^2 = 75$
   $|OH| = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} = 8{,}66$
   Aire de OAB = $\dfrac{10.5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3} = 43{,}30$
7. Aire de l'hexagone : $6.25\sqrt{3} = 150\sqrt{3} = 259{,}81$



b. Calcule l'amplitude des angles x , y , z et t dans les figures suivantes et justifie tes réponses.

• x = 90° car tout triangle inscrit dans un demi cercle est rectangle .

• y = 35° car tout angle inscrit dans un cercle vaut la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

• z = 41° car car 2 angles aigus à côtés respectivement perpendiculaires sont de même amplitude.

• t = 41° car dans un cercle, 2 angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même amplitude.

c. La droite d est tangente en B au cercle de diamètre [AB] et de centre O. On donne |MAB| = α . Calcule en fonction de α, les amplitudes des angles

.

• $|A\hat{M}B| = 90°$

$|A\hat{B}M| = 90° - \alpha$

$|M\hat{B}N| = \alpha$

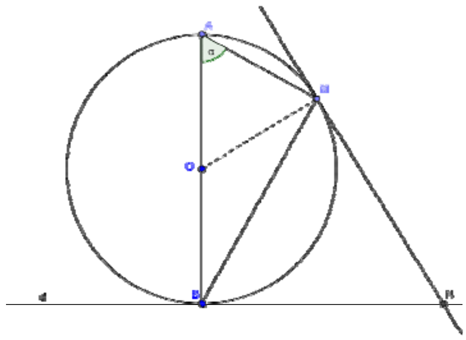
$|A\hat{M}O| = \alpha$

$|A\hat{O}M| = 180° - 2.\alpha$

$|M\hat{O}B| = 2\alpha$

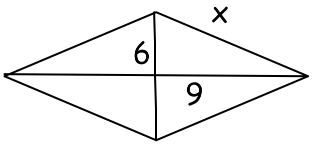
$|O\hat{M}B| = |O\hat{B}M| = \dfrac{180° - 2.\alpha}{2} = 90° - \alpha$

$|MNB| = 180° - 2\alpha$



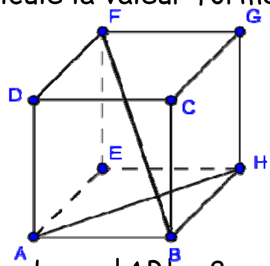
d. Que mesure la diagonale d'un carré de 4 cm de côté ? • $x = 4\sqrt{2} = 5{,}66$

e. Si dans un losange, les diagonales mesurent 12 cm et 18 cm, que vaut le côté ?



• $x^2 = 6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117$ et $x = 10{,}82$

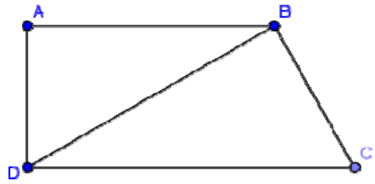
f. Dans le cube ci-dessous dont l'arête mesure 4 cm, calcule la valeur formelle et la valeur approchée au millième près de [AH] et de [FB] .



• $|AH| = 4\sqrt{2} = 5{,}657$ cm

$|FB| = 4\sqrt{3} = 6{,}928$ cm

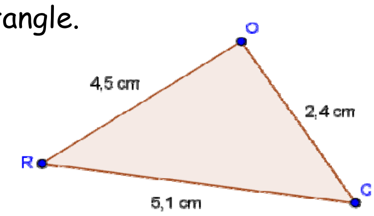
g. ABCD est un trapèze tel que AD ⊥ AB et BD ⊥ BC. On donne |AB| = 8 cm , |AD|= 6 cm, |DC|= 12,5 cm . Calcule |BC|.



• $|BD|^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$ et $|BD| = 10$

$|BC|^2 = 12{,}5^2 - 10^2 = 56{,}25$ et $|BC| = 7{,}5$

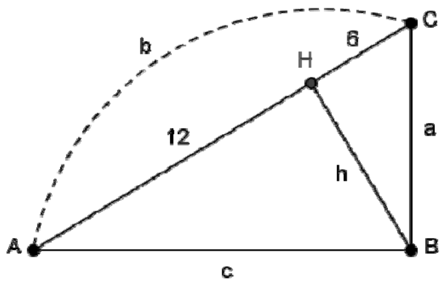
h. Justifie que le triangle ROC est rectangle.



• ROC est rectangle si :
$|RC|^2 = |RO|^2 + |OC|^2$

$|RC|^2 = 5{,}1^2 = 26{,}01$
$|RO|^2 + |OC|^2 = 4{,}5^2 + 2{,}4^2 = 26{,}01$ donc le triangle est rectangle.

i. Calcule la mesure de la hauteur et des deux côtés de l'angle droit. Donne tes réponses arrondies à 10^{-2} près.



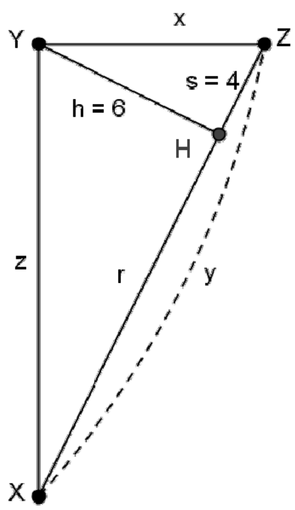
• $h^2 = r.s = 12 \, . \, 6 = 72 \Leftrightarrow h = \quad = 8{,}49$

• $b = 12 + 6 = 18$

• $a^2 = 6 \, . \, 18 = 108 \Leftrightarrow a = \sqrt{108} = 10{,}39$

• $c^2 = 12 \, . \, 18 = 216 \Leftrightarrow c = \sqrt{216} = 14{,}70$

j. Calcule les mesures des 3 côtés du triangle.



• $h^2 = r \, . \, s \Leftrightarrow \quad r = \frac{h^2}{s} = \frac{36}{4} = 9$

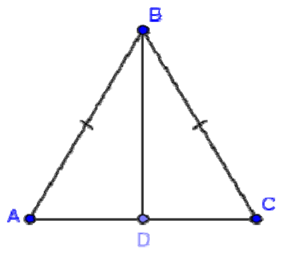
• $y = 9 + 4 = 13$

• $x^2 = s \, . \, y = 4 \, . \, 13 = 52 \Leftrightarrow x = \quad \sqrt{52}$ 7,21

• $z^2 = r \, . \, y = 9 \, . \, 13 = 117 \Leftrightarrow z = \quad \sqrt{117} \qquad = 10{,}82$

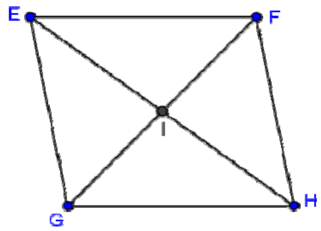
k. Observe attentivement les notations sur les figures.
Justifie que les triangles donnés sont isométriques en énonçant le cas utilisé.

ABD iso DBC



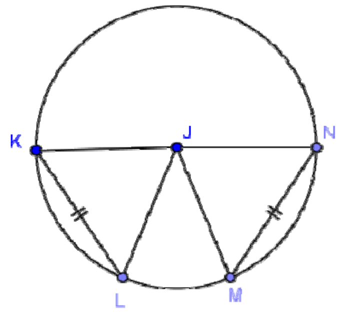
[BD] est la bisectrice de l'angle ABC

EIF iso IHG



EF // GH et EG // FH

KJL iso JNM



- ABD iso DBC car :

|AB|=|BC| par déf. du tr. Isocèle

$|\hat{B}_1| = |\hat{B}_2|$ par déf. de la bissectrice

|BD|=|BD| car côté commun

CAS CAC

- EIF iso HIG car :

|EI|=|HI| propr. des diagonales d'un parallélogramme

$|\hat{I}_1| = |\hat{I}_2|$ angles opposés par le sommet

|FI|=|GI| propr. des diagonales d'un parallélogramme

CAS CAC

- KJL iso JMN car :

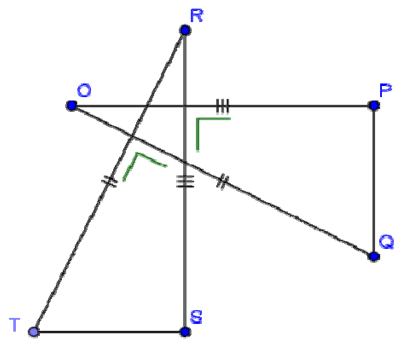
|KJ|=|MJ| car rayons du cercle

|JL| = |JN| car rayons du cercle

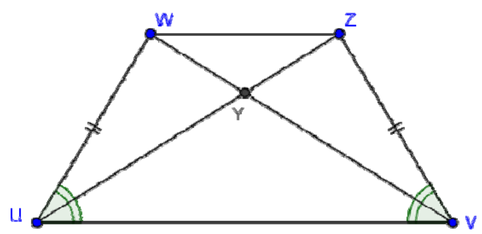
|KL|=|MN| par hypothèse

CAS CCC

OPQ iso RTS



VUW iso ZUV



- OPQ iso RST car :

|OP|=|RS| par hypothèse

$|\hat{R}| = |\hat{S}|$ angles à côtés perpendiculaires

|OQ|=|RT| par hypothèse

CAS CAC

- VUW iso UVZ car :

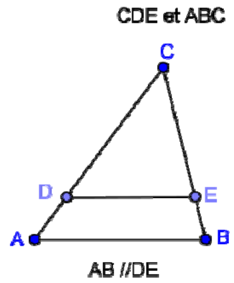
|UW|=|ZV| par hypothèse

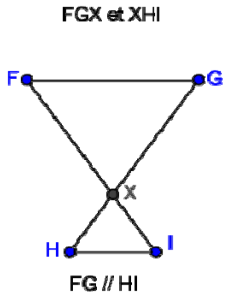
$|\hat{U}| = |\hat{V}|$ par hypothèse

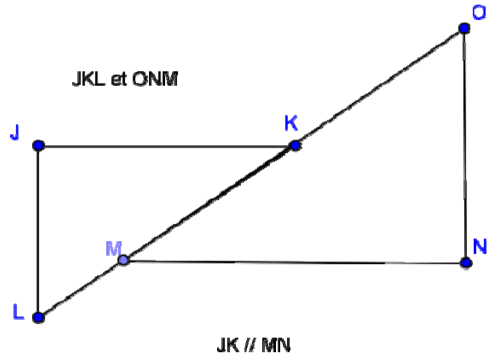
|UV|=|UV| car côté commun

CAS CAC

I. Justifie que les triangles donnés sont semblables puis note les proportions correspondantes.







$\Delta CDE \sim \Delta CAB$ car :

$|\hat{D}| = |\hat{A}|$ angles correspondants

$|\hat{C}| = |\hat{C}|$ angle commun

$$\Rightarrow \frac{|CD|}{|CA|} = \frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|CE|}{|CB|}$$

$\Delta FGX \sim \Delta IHX$ car :

$|\hat{F}| = |\hat{I}|$ angles alternes - internes

$|\hat{X}_1| = |\hat{X}_2|$ angles opposés par le sommet

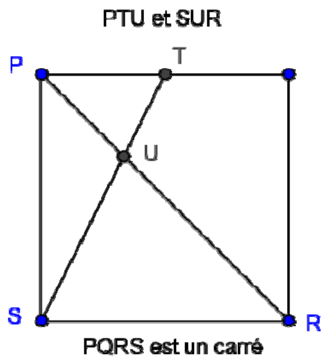
$$\Rightarrow \frac{|FG|}{|IH|} = \frac{|GX|}{|HX|} = \frac{|FX|}{|IX|}$$

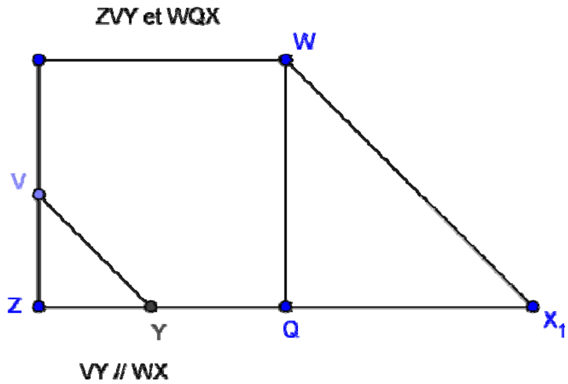
$\Delta JKL \sim \Delta NMO$ car :

$|\hat{J}| = |\hat{N}|$ angles droits

$|\hat{K}| = |\hat{M}|$ angles alternes - internes

$$\Rightarrow \frac{|JK|}{|NM|} = \frac{|KL|}{|MO|} = \frac{|JL|}{|NO|}$$





$\Delta PTU \sim \Delta RSU$ car :

$|\hat{P}| = |\hat{R}|$ angles alternes - internes

$|\hat{U}_1| = |\hat{U}_2|$ angles opposés par le sommet

$$\Rightarrow \frac{|PT|}{|RS|} = \frac{|TU|}{|SU|} = \frac{|PU|}{|RU|}$$

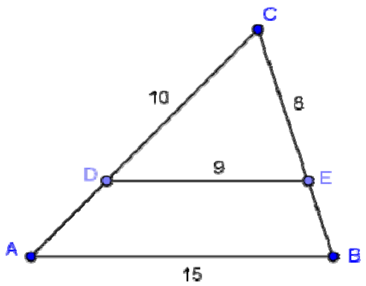
$\Delta VZY \sim \Delta WQX$ car :

$|\hat{Z}| = |\hat{Q}|$ angles droits

$|\hat{Y}| = |\hat{X}|$ angles correspondants

$$\Rightarrow \frac{|VZ|}{|WQ|} = \frac{|ZY|}{|QX|} = \frac{|VY|}{|WX|}$$

m. Calcule le rapport de similitude qui permet d'agrandir le triangle CDE puis calcule les côtés [AC] et [BC] . Compare les aires des deux triangles.



- $r = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$

Donc pour agrandir le triangle, on multiplie chaque côté par 5/3.

$$|AC| = |CD| . \frac{5}{3} = 10 . \frac{5}{3} = \frac{50}{3} = 16{,}67$$

$$|CB| = |CE| . \frac{5}{3} = 8 . \frac{5}{3} = \frac{40}{3} = 13{,}33$$

L'aire de ABC est $(5/3)^2 = 25/9$ fois plus grande que l'aire de CDE.

n. On agrandit un triangle ABC pour obtenir le triangle A'B'C'. Si |AB | = 7 et |A'B'|= 17,5 :

a) quel est le rapport de similitude des 2 triangles ? • $r = \frac{17{,}5}{7} = 2{,}5$

b) si l'aire de ABC vaut 24 cm², quelle est l'aire de A'B'C' ?

- Aire de A'B'C' = aire de ABC . $2{,}5^2$ = 24 . 6,25 = 150 cm²

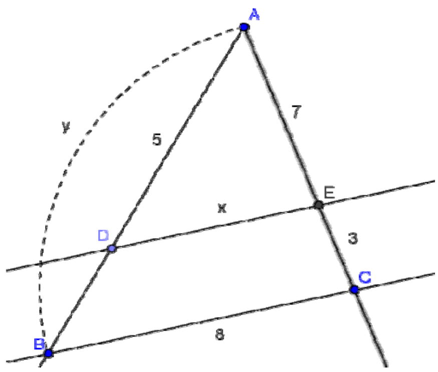
o. Si l'aire de la figure F vaut 10 cm² et l'aire de la figure F' 512 cm²

a) quel est le rapport de similitude des deux triangles ?

- $\frac{\text{aire } F'}{\text{aire } F} = \frac{512}{50} = 10{,}24 \Rightarrow r = \sqrt{10{,}24} = 3{,}2$

b) que mesure [B'C'] SI |BC| =3 cm ? • $|B'C'| = |BC| . 3{,}2 = 3 . 3{,}2 = 9{,}6$ cm

p.



Dans la figure ci - contre DE // BC.
Complète :

a) Les triangles ADE et ABC sont semblables car :
- $|\hat{D}| = |\hat{B}|$ angles correspondants
- $|\hat{A}| = |\hat{A}|$ angle commun

b) On en déduit les proportions suivantes : • $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|AC|}$ ①

c) On peut appliquer le théorème de Thalès car : • on a deux droites sécantes AB et AC coupées par les droites parallèles DE et BC.

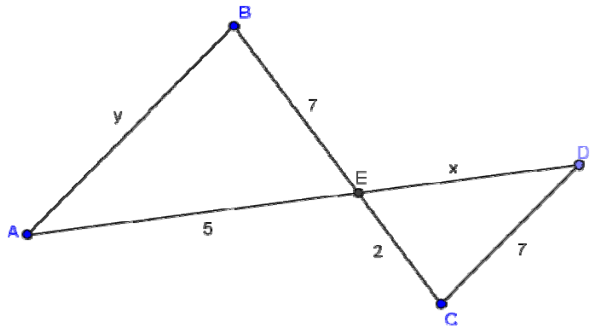
d) On en déduit les proportions suivantes : • $\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{|DB|}{|EC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ ②

e) En utilisant les proportions adéquates, calcule x et y.

- ① : $\frac{5}{y} = \frac{x}{8} = \frac{7}{10}$ ⇔ 10 x = 56 ⇔ x = 5,6

- ② : $\frac{5}{7} = \frac{|DB|}{3} = \frac{y}{10}$ ⇔ 7y = 50 ⇔ y = $\frac{50}{7} = 7{,}14$

q. Dans la figure ci-contre, AB // CD .
Complète :



a) Les triangles ABE et EDC sont semblables car :
- $|\hat{A}| = |\hat{D}|$ angles alternes - internes

  $|\hat{E}_1| = |\hat{E}_2|$ angles opposés par le sommet

b) On en déduit les proportions suivantes : • $\frac{|AB|}{|DC|} = \frac{|BE|}{|CE|} = \frac{|AE|}{|DE|}$ ①

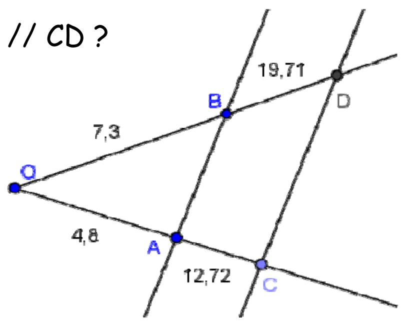
f) On peut appliquer le théorème de Thalès car : on a deux droites sécantes AD et BC coupées par les droites parallèles AB et CD .

c) On en déduit les proportions suivantes : • $\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|ED|}{|EC|} = \frac{|AD|}{|BC|}$ ②

d) En utilisant les proportions adéquates, calcule x et y.

- ① : $\frac{Y}{7} = \frac{7}{2} = \frac{5}{x}$ ⇔ 2y = 49 ⇔ y = $\frac{49}{2}$ = 24,5
- ② : $\frac{5}{7} = \frac{x}{2} = \frac{|AD|}{|BC|}$ ⇔ 7x = 10 ⇔ X = $\frac{10}{7} = 1{,}43$

r. Dans la figure ci - dessous, peut - on affirmer que AB // CD ?



- AB // CD si $\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|BD|}{|AC|}$

Or, $\frac{7{,}3}{4{,}8}$ = 1,52 et $\frac{19{,}71}{12{,}72}$ = 1,55

Donc, les droites ne sont pas parallèles.